

Universitatea „Dunărea de Jos” Galați
Facultatea de Istorie, Filosofie și Teologie
Specializarea Filosofie, an II

Teoria deciziilor. Măsurarea utilității preferințelor

Îndrumător științific: Lect. univ. dr. Viorel Rotilă

Autor: Podască Alin-Răzvan

Galați – 2016.

Cuprins

1. Noțiune	3
2. Preferințe și perspective	3
3. Măsurarea utilității preferințelor	4
3.1. Utilități ordinale	4
3.2. Utilități raportate la interval (sau utilități cardinale)	5
3.3. Teoria reprezentăției a lui von Neumann și Morgenstern (vNM)	6

1. Noțiune

Teoria deciziei se ocupă cu motivele care stau la baza unei alegeri, fie că este vorba de o alegere trivială (exemplu: ce fel de mâncare să alegi pentru prânz), fie că este vorba de alegeri mai importante (exemplu: dacă să mă căsătorescu sau nu).

2. Preferințe și perspective

Cele două concepte de bază ale teoriei deciziei sunt *preferința* și *perspectiva*. Spunem că cineva preferă opțiunea A în defavoarea opțiunii B atunci când opțiunea A este mai de dorit (sau meritând mai mult alegerea) decât opțiunea B. Deci preferința este o atitudine ce are la baza compararea; în exemplul dat se compara opțiunea A cu opțiunea B.

„ $A \leq B$ ” semnifică faptul că B este cel puțin la fel de preferat ca A, iar relația desemnată de „ $\leq$ ” poartă numele de *relția preferinței mici* (sau relația preferinței slabe; *weak preference relation*). Semnul „ $<$ ” semnifică *relția preferinței absolute* (*strict preference relation*), iar ea se exprimă astfel: $A < B \equiv A \leq B \ \& \ \neg (B \leq A)$. Există și *relția de indiferență*: $A \sim B \equiv A \leq B \ \& \ B \leq A$. Această formulă semnifică faptul că o persoană consideră A și B a fi la fel de preferabile.

Relația preferinței mici se aplică elementelor mulțimii S ($\leq$ *weakly orders a set S of options*) dacă se îndeplinesc două axiome:

- cea a completitudinii: pentru fiecare A, B $\in$ S, atunci fie $A \leq B$, fie $B \leq A$;
- cea a tranzitivității¹: pentru fiecare A, B, C $\in$ S, atunci dacă $A \leq B$ și $B \leq C$ rezultă că $A \leq C$.

Aceste două axiome sunt controversate și au dat naștere la mai multe atacuri.

Atractivitatea primei axiome poate depinde și de natura opțiunilor pe care le avem în vedere, cât și de interpretarea pe care o dăm termenului „preferință”. Atunci când opțiunile sunt de natură diferite axioma completitudinii poate să nu mai pară atractivă: de exemplu, dacă opțiunea A semnifică faptul că două persoane vor învăța să citească, în timp ce opțiunea B semnifică faptul că două persoane se vor îmbolnăvi de cancer. Prima axiomă ar presupune să acceptăm ambele aceste două opțiuni. Dacă opțiunile sunt de natură similară – exemplu: opțiunea A semnifică faptul că doi copii vor primi bomboane, iar opțiunea B semnifică faptul că doi copii vor primi ciocolată – atunci axioma completitudinii este atractivă.

Și interpretarea termenului preferință este importantă: economiștii preferă să creadă că acest termen se referă strict la o alegere; conform acestei abordări, axioma completitudinii este în mod automat satisfăcută, căci oricum se va face o alegere. Termenul „preferință” se poate însă referi și la atitudini mentale, la deliberări asupra preferabilității a două opțiuni și nu la alegeri în sine²; de fapt, acesta este și sensul pe care cei mai mulți dintre cei care s-au aplecat asupra teoriei deliberării l-au ales.

Axioma tranzitivității afirmă că dacă opțiunea B este cel puțin la fel de preferabilă ca opțiunea A, iar opțiunea C este cel puțin la fel de preferabilă ca opțiunea B, atunci A nu poate fi preferat în mod categoric lui C. Și împotriva acestei axiome s-a adus argumentul eterogenității: se presupune că preferința pentru una dintre opțiuni va fi influențată de modul în care se accentuează anumite caracteristici a opțiunilor. De exemplu, să presupunem că realizăm o comparație între o mașină A și una B și că accentuăm chestiunea vitezei acestor mașini, iar B nu este cel puțin la fel de bună ca A în ceea ce privește viteza. Totuși, atunci când comparăm mașina B cu mașina C putem accentua gradul de siguranță pe care mașina ni-l oferă, iar C este cel puțin la fel de bună ca B în această privință. Când comparăm A cu C să zicem că accentuăm frumusețea mașinilor. Unii autori au argumentat că în această situația axioma tranzitivității nu ar mai avea aplicare.

¹ *Relație tranzitivă* = relație între elementele unei mulțimi, care, atunci când se verifică pentru primul și al doilea, în consecință pentru al doilea și un al treilea element, se verifică și pentru primul și al treilea (*Dicționar de neologisme*, 1986).

² *mental attitudes, i.e., considered judgments about whether an option is better or more desirable than another.*

Unii autori au argumentat că această abordare este greșită: de fapt, ar trebui să se analizeze doar o calitate generală de „bun” al mașinilor, în această calitate presupunându-se că s-au avut deja în vedere caracteristici specifice precum viteza, frumusețea etc. Cel mult ar putea interveni un context specific care să îl facă pe subiect să aibă alte preferințe, însă atunci însăși opțiunile își vor schimba natura.

Un alt argument ce a fost adus pentru sprijinirea tranzitivității este argumentul „pompei de bani” (*money pump*). Se pleacă de la prezumția că dacă îl găsești pe X cel puțin la fel de dezirabil ca Y, atunci nu ai avea nici un motiv de a refuza schimbarea lui Y pentru X. Prezumând că axioma tranzitivității nu ar fi respectată: să zicem că avem $A \leq B$, $B \leq C$, dar $C < A$, iar la momentul actual posedăm A. Ai fi dispus să îl schimbi pe A pentru B, iar pe B pentru C. Dar tu îl preferi pe A în fața lui C, așa că nu l-ai schimba pe A cu C decât dacă ți s-ar oferi în plus și o sumă de bani x. Astfel, dacă ai urma primul traseu de schimb (întâi îl schimbi pe A cu B) ai ieși în pierdere față de al doilea traseu cu suma de bani x. Acest proces s-ar putea repeta și astfel tu ai deveni o „pompă de bani” pentru alții (de unde și numele teoriei). Argumentul afirmă că există ceva irațional în natura alegerilor intransitive. Pe de altă parte, dacă preferințele ar fi fost tranzitive, nu ai fi devenit o „pompă de bani”.

Cu toate aceste controverse, în cadrul expunerii de față se vor accepta ca sigure următoarele afirmații:

1. obiectele preferințelor pot să fie eterogene, caracterizate prin variate trăsături;
2. opțiunile sunt alegeri și nu atitudini mentale;
3. preferințele satisfac atât axioma completitudinii, cât și pe cea a tranzitivității.

3. Măsurarea utilității preferințelor

Reprezentarea numerică a preferințelor în funcție de ordonarea lor rezultă în *funcția*³ *utilității* (*utility function*). Există două mari tipuri de funcții ale utilității: cea *ordinală* (*ordinal*) și cea *raportată la intervale* (*interval-valued*).

3.1. Utilități ordinale

Atâta vreme cât mulțimea S este finită, orice relație de preferință mică (*weak preference relation*) între unele dintre opțiunile mulțimii poate fi reprezentată printr-o funcție a utilității ordinale. Astfel avem: pentru orice A, B ∈ S: $u(A) \leq u(B) \equiv A \leq B$. Relația de preferință reprezentată mai înainte maximizează utilitatea, deoarece întotdeauna va fi favorizată opțiunea cu cea mai mare utilitate.

Singura informație conținută într-o reprezentare de acest gen este cum subiectul ordonează opțiunile, de la cea mai puțin preferată la cea mai preferată. Asta înseamnă că dacă u este o funcție a utilității ordinale care reprezintă relația preferinței mici ($\leq$), atunci orice u' care este o transformare ordinală al lui u (transformare care să respecte formula „A, B ∈ S: $u(A) \leq u(B) \equiv A \leq B$ ”) reprezintă relația preferinței mici la fel de mult ca și u.

Pentru ca să existe o funcție a utilității ordinale care să reprezintă o relație a preferinței mici, atunci această relație trebuie să respecte axiomele completitudinii și tranzitivității. Dacă relația respectă aceste două axiome, atunci opțiunile ce formează mulțimea S pot fi așezate în ordine, de la cel mai puțin dezirabil la cel mai dezirabil; există totuși posibilitatea ca două opțiuni să posede exact aceeași dezirabilitate. Existența funcției utilității ordinale îmi permite să atribui valori numerice opțiunilor ce formează mulțimea S.

Această funcție nu mai pare așa de convingătoare la o analiză matematică mai atentă. Nu putem compara două seturi de utilități ordinale. De exemplu, să ne imaginăm o pereche de opțiuni ce au utilitatea de 2 și 4 și o pereche a cărei opțiuni au utilitatea de 0 și 5. Să ne imaginăm că probabilitatea este de 0.5% pentru fiecare opțiune din cele două perechi. Astfel, probabilitatea primei perechi este de 3, pe când probabilitatea celei de a doua perechi este de 2.5. Dacă

³ *Funcție* = mărime variabilă care depinde de una sau de mai multe mărimi variabile independente (DEX '09).

transformăm utilitățile ordinale din cea de-a doua pereche într-un mod permisiv, astfel încât opțiunea mare va fi 10, nu 5, atunci probabilitatea celei de a doua perechi va fi de 5, nu de 2.5.

3.2. Utilități raportate la interval (sau utilități cardinale)

Pentru a înțelege funcțiile utilităților cardinale putem să lucrăm cu mecanismul loteriei. Să ne imaginăm trei destinații de vacanță: A, B și C. Să presupunem că ordinea preferinței este $A < B < C$. Funcția pe care urmează să o analizăm este folositoare atunci când vrem să avem în vedere nu doar că preferăm mai mult pe C lui B și pe B lui A, ci când vrem să știm care este diferența dintre preferința acordată lui C față de preferința acordată lui B și dintre preferința acordată lui B față de cea acordată lui A.

Putem să ne imaginăm o altă opțiune, o loterie (L) care îi are pe A și pe C ca premii, și să aflăm care este șansa de a îl obține pe C astfel încât subiectul să fie indiferent în alegerea opțiunii L sau a opțiunii B. De exemplu, dacă subiectul va fi indiferent între o loterie ce îi oferă foarte slabe șanse pentru a obține C și între opțiunea B, este clar că diferența dintre A și B nu este foarte mare.

Această înseamnă că loteriile sunt evaluate în funcție de *dezirabilitatea* și de *previzibilitate*: *expected choice-worthiness or desirability*. Dezirabilitatea unei loterii este suma șanselor obținerii fiecărui premiu înmulțite cu dezirabilitatea acelui premiu. Să presupunem că subiectul este indiferent atunci când este pus să aleagă între B și loteria L' cu șansa pentru C de $3/4$ și cu șansa pentru A de $1/4$. Aceasta înseamnă că în cadrul unui interval ce îl are pe cea mai joasă poziție pe A, iar pe cea mai înaltă poziție pe C, B se află la punctul ce este de trei ori mai departe de A decât este aproape de C. Dacă $u(A) = 0$ și $u(C) = 1$, atunci $u(B) = u(L') = 3/4$. Această înseamnă că dezirabilitatea (sau utilitatea) previzibilă a loteriei este de $3/4$ [$u(L') = 1/4 \cdot 0 + 3/4 \cdot 1 = 3/4$]. Asta înseamnă că valoarea loteriei este suma (transformată în probabilitate) utilității premiilor, unde valoarea fiecărui premiu este determinată de probabilitatea că loteria va obține acel premiu.

În exemplul pe care l-am oferit, dacă dăm lui A valoarea 1 și lui C valoarea 5, atunci B și L' vor avea valoarea 4, adică $3/4$ din distanța dintre 1 și 5. Dacă mai presupunem existența unei funcții a utilității u' care să se raporteze astfel la u : $u' = 4 \cdot u + 1$, atunci această relație întotdeauna va fi adevărată între astfel de funcții. Dacă u este o funcție a utilității raportate la interval care reprezintă ordinea preferinței „ $\leq$ ”, iar u' este tot un asemenea tip de funcție, atunci există constante a și b , unde a trebuie să fie pozitiv astfel încât să avem $u' = a \cdot u + b$. Această înseamnă că funcții ale utilității raportate la interval sunt univoce (*unique*) doar în cazul transformării lineare pozitive (*positive linear transformation*)⁴.

Trebuie să menționăm două limitări ce sunt implicite acestei operații. Deoarece utilitatea unei opțiuni [atât atunci când vorbim de o utilitate ordinală (*ordinal utility*), cât și când vorbim de o utilitate raportată la interval (*interval-valued utility*)] este determinată în raport cu utilitatea unor alte opțiuni, nu putem vorbi de o utilitate absolută a unei opțiuni.

O altă critică ar fi că nici utilitățile ordinale, nici cele raportate la interval, nu sunt capabile a fi comensurabile⁵ interpersonal. Să oferim un exemplu pentru a explica această afirmație: să presupunem că două persoane au aceeași ordonare a preferințelor: $A < B < C$. Să presupunem de asemenea că ambele persoane sunt indiferente în ceea ce privește opțiunea B și opțiunea L', opțiune ce oferă o probabilitate de $3/4$ pentru C și de $1/4$ pentru A. Totuși, nu se poate vorbi de o „indiferență totală”. Este posibil ca pentru o persoană toate variantele să fie neplăcute, iar C doar să fie cea mai puțin neplăcută dintre ele; pe când pentru cealaltă persoană, toate reprezintă o opțiune extraordinară, iar opțiunea C reprezintă cu adevărat un paradis. Raporturile dintre preferința pentru diferitele opțiuni este același pentru ambele persoane, însă se vede foarte clar că ar fi deplasat să vorbim despre o „dezirabilitate totală”. Să nu uităm că teoria deciziei nu constă din simple exerciții de logică, ci că aspiră la o aplicabilitate în viața de zi cu zi.

⁴ O transformare lineară pozitivă este un o transformare de forma $X' = a + b \cdot X$.

⁵ COMENSURABIL, -Ă, *comensurabili*, -e, adj. = (Mat.; despre două sau mai multe mărimi) Care pot fi măsurate cu aceeași unitate de măsură, valorile amândurora fiind multipli întregi ai unității folosite (DEX '09).

3.3. Teoria reprezentății a lui von Neumann și Morgenstern (vNM)

Teoria vNM analizează relația de preferință, adăugând, pe lângă completitudine și tranzitivitate și alte principii care guvernează această relație. Preferințele unui subiect sunt de fapt o *maximizare a utilității previzibile* (*maximising expected utility*) în toate cazurile în care preferințele acelui subiect respectă principiile relației de preferință.

Utilitatea previzibilă a unei loterii poate fi exprimată astfel: L_i reprezintă o loterie dintr-un set L de loterii, iar R_{ik} reprezintă rezultatul (adică premiul; ceea ce înainte numisem „opțiune”) acelei loterii; acest rezultat apare cu o probabilitate de p_{ik} . Utilitatea previzibilă a loteriei L_i poate fi reprezentată astfel: $UP(L_i) \equiv \sum (*_k \text{ este sub semn}) u(R_{ik}) \cdot p_{ik}$. Aceasta este teoria vNM.

Afirmația despre loterie poate fi transpusă astfel: pentru orice $L_i, L_j \in L$: $L_i \leq L_j \equiv UP(L_i) \leq UP(L_j)$. Dacă această formulă este respectată, putem zice că subiectul maximizează utilitatea previzibilă. Conform teoriei vNM, din setul L trebuie să facă parte atât loteriile L_i și L_j , cât și loteriile care au L_i și L_j drept opțiuni (premii). Totuși, s-ar putea reduce aceste loterii ce au ca opțiuni loterii la loterii „simple”, care nu au ca opțiuni alte loterii.

La relația de preferință, teoria vNM introduce alte două axiome; pentru prezentarea lor se va folosi următoarea notație: $\{pA, (1-p)B\}$. Aceasta denotă o loterie care poate rezulta fie în A , cu o probabilitate p , sau în B , cu o probabilitate $1-p$.

Axioma continuității: să presupunem $A \leq B \leq C$. Atunci avem un $p \in [0, 1]$ astfel încât $\{pA, (1-p)C\} \equiv B$.

Axioma independenței: să presupunem că $A \leq B$. Atunci pentru orice C și pentru orice $p \in [0, 1]$ avem: $\{pA, (1-p)C\} \leq \{pB, (1-p)C\}$.

Axioma continuității implică faptul că nici un rezultat nu este așa de rău încât să nu fim gata de a risca să jucăm la loterie, știind că am putea obține și un rezultat mai bun decât cel mai prost. Această axiomă presupune și faptul că ordonarea opțiunilor în funcție de preferință poate fi reprezentată sub forma unei funcții cardinale (sau raportate la interval) continue (*continuous cardinal function*).

Axioma independenței implică faptul că atunci când două opțiuni au aceeași probabilitate pentru împlinirea unui anumit rezultat, judecata noastră asupra lor ar trebui să nu țină cont de acel rezultat. Preferința loteriilor ar trebui să țină cont doar de lucrurile pe care acestea nu le au în comun. O ordonare a preferințelor trebuie să respecte axioma independenței pentru a maximiza *funcția separabilă aditivă* (*additively separable function*). Această funcție spune că valoarea (sau utilitatea previzibilă) a unei opțiuni este suma (măsurată în procente) valorilor rezultatelor posibile.

Axioma continuității a primit și critice. De exemplu, există o probabilitate p pentru care o persoană să fie gata să își asume riscul de a muri pentru o probabilitate $1-p$ de a câștiga 100 de lei? Răspunsul este problematic. Astfel, se poate spune că ne asumăm întotdeauna un risc minuscul de a muri pentru a câștiga anumite bunuri ori avantaje de chiar mică valoare. Un om s-ar întoarce să ia o bancnotă de 100 de lei pe care a scăpat-o în mijlocul străzii, știind că riscul de a fi lovit de o mașină este totuși mic (șoferii or să oprească, o să îl ocolească ș.a.).

Există și exemple în care oamenii nu respectă axioma independenței. Un cunoscut exemplu este *paradoxul Allais*, introdus de economistul francez Maurice Allais în ani 1950'. Să ne imaginăm ca avem două perechi de loterii precum sunt prezentate mai jos. Dacă se extrage un bilet al cărui număr se încadrează în acele intervale, vom câștiga premiul asociat cu acel interval: de exemplu, în cazul loteriei L_1 , dacă obținem numărul 6, ne vom încadra în intervalul „2-34” și astfel vom obține 2500 \$.

Numărul biletului	1	2-34	35-100
L_1	\$ 0	\$ 2500	\$ 2400
L_2	\$ 2400	\$ 2400	\$ 2400
Numărul biletului	1	2-34	35-100
L_3	\$ 0	\$ 2500	\$ 0
L_4	\$ 2400	\$ 2400	\$ 0

În testele făcute de către Allais, multe persoane preferă L_2 în fața lui L_1 și L_3 în fața lui L_4 ; aceste preferințe sunt cunoscute drept *preferințele Allais*. În faptul alegerii lui L_2 în favoarea lui L_1 vedem faptul că riscul de a nu primi nimic când ai fi putut primi cu siguranță 2400 \$ nu justifică alegerea lui L_1 , cu toate că acesta oferă și șansa unui câștig de 2500 \$. În a doua pereche observăm că în ambele loterii o persoană poate ajunge să nu primească nimic, cu diferența că în cazul lui L_3 există o șansă în plus de a nu primi nimic. Totuși, tot în cazul lui L_3 te și poți alege cu un premiu de 2500 de dolari. Acea șansă în plus de a nu te alege cu nimic nu a reușit să îi îndepărteze pe oameni de a loteria L_3 .

Preferințele Allais intră în conflict cu axioma independenței. În ambele perechi, premiul asociat cu biletele 35-100 este același; conform axiomei independenței, alegerea ta ar trebui să nu țină cont de acele bilete. În când ignorăm cea ultimă coloană, L_1 devine identic cu L_3 , iar L_2 devine identic cu L_4 . Astfel, când tu preferi L_2 în fața lui L_1 , însă preferi și L_3 în fața lui L_4 , nu respecți axioma independenței.

Teorema vNM poate fi expusă astfel: R este o mulțime finită de rezultate, L o mulțime de loterii corespunzătoare rezultatelor, iar $\leq$ o relație de preferință slabă în L . Atunci $\leq$ satisface axiomele 1-4 dacă și numai dacă există o funcție u , de la R în mulțimea numerelor reale (*from O into the set of real numbers*), funcție care este univocă în ceea ce privește transformarea pozitivă lineară și în raport cu care $\leq$ poate fi reprezentat ca maximizând utilitatea previzibilă.

Bibliografie:

- *Decision theory*, în *Encyclopædia Britannica Ultimate Reference Suite*, Encyclopædia Britannica, Chicago, 2015.
- Steele, Katie; Stefánsson, H. Orri; *Decision Theory*, în plato.stanford.edu (24.12.2015).